Un exemple d'aplicació pràctica de les sèries de Fourier en climatologia

Javier MARTÍN VIDE
Professor de la Universitat de Barcelona

0. Introducció

L'anomenada anàlisi harmònica no ha rebut, en general, per part de la Geografia l'atenció que mereix, com a valuosa eina analítica en l'estudi de fenòmens que presenten periodicitat; fenòmens, com els règims anuals dels elements climàtics i els hidrològics dels cursos fluvials, les oscil·lacions estacionals d'un nombrós conjunt de paràmetres sòcio-econòmics, ja siguin les entrades de turistes, el nombre d'aturats, les variacions del preus de certs productes, etc, i, en general, les sèries temporals de dades geogràfiques, que abracen una llarga llista de fets naturals, socials i econòmics.

La naturalesa matemàtica de l'anàlisi harmònica i la mateixa formulació quelcom aparatosa, no han estat certament factors propicis per al seu ús per part dels geògrafs. A Espanya, les aplicacions geogràfiques de l'esmentat procediment són escassíssimes. En la vessant climatològica, cal citar la recent tesi doctoral de Brunet (1989), inèdita, on s'aplica a les temperatures mitjanes diàries al llarg de l'any dels observatoris de Tarragona i Reus.

En la present nota, es detalla un exemple de càlcul directe de la sèrie de Fourier —element fonamental de l'anàlisi harmònica— que s'ajusta a les temperatures mitjanes mensuals de Barcelona, com a guia d'altres aplicacions geogràfiques similars. No és l'objecte d'aquesta nota, doncs, fonamentar matemàticament l'anàlisi harmònica, ni les sèries de Fourier, la qual cosa el lector interessat pot trobar en un bon nombre d'obres d'anàlisi matemàtica (BASS, 1970), sinó subministrar al geògraf la «mecànica» més senzilla per a la seva aplicació, mitjançant el desenvolupament d'un exemple.

1. Bases de l'aplicació de les sèries de Fourier

Molt senzillament, l'anàlisi harmònica consisteix, en essència, en descompondre una funció, o un conjunt de dades ordenades cronològicament, en la qual s'adverteix una certa periodicitat en suma de diverses funcions periòdiques, o ones regulars. Les sèries de Fourier són aquestes sumes de funcions periòdiques, ones regulars o harmòniques.

Una sèrie de Fourier és una suma infinita de termes trigonomètrics, tal com:

$$f(x)=a_0/2+a_1cosx+b_1sen_2x+a_2cos2x+bsen2x+...+a_ncosnx+b_nsennx+...$$

sent a_i y b_i els anomenats coeficients de Fourier. Com és ben sabut les funcions trigonomètriques són periòdiques.

Una expressió més senzilla, i més aplicable a l'exemple que es desenvoluparà, d'una sèrie de Fourier és:

$$f(x)=m+a_1\ sen(x+A_1)+a_2\ sen(2x+A_2)+a_3\ sen(3x+A_3)+...$$

on només apareixen termes en sinus, essent *m* la mitjana dels valors de partida i els altres sumands, les diferents ones, harmònics o sinusoides, en les que a_i són les seves semiamplituds, és a dir, la meitat de la diferència entre els valors extrems.

El lector interessat en aplicacions climatològiques de l'anàlisi harmònica o, comunament, anàlisis de Fourier, pot trobar exemples en BROOKS i CARRUTHERS (1953), LORENTE (1966), SUMNER (1978) i MARTÍNEZ MOLINA (1986). En les dues darreres obres es resolen, amb diferents procediments, dos casos sobre precipitació i insolació mitjanes mensuals.

2. Exemple de desenvolupament de les temperatures mitjanes mensuals de Barcelona en sèrie de Fourier

Donats els 12 valors de les temperatures mitjanes mensuals de Barcelona, es tracta d'obtenir una funció suma de sinusoides o harmònics que les ajustin. Això està justificat pel fet que les temperatures mitjanes mensuals constitueixen un conjunt de valors que poden considerar-se que es repeteixen en un període anual. Per ésser periòdic podrà desenvolupar-se com sèrie de Fourier.

Sent els valors de partida els que subministra l'I.N.M. (1982), els càlculs es disposen ordenadament en el quadre adjunt, de la següent manera. En la primera columna, encapçalada per t_i, apareixen les temperatures mitjanes mensuals de Barcelona, de gener a desembre, expressades en graus centígrads. En la segona columna, es numeren cronològicament, començant per 0, els mesos. En la tercera, s'indica la diferència entre la temperatura mitjana mensual corresponent i la temperatura mitjana anual, és a dir, el valor mitjà de les dades de partida, que és 16,5°C. En la quarta, figura la variable independent de la sèrie, que és *x*, amb uns valors, expressats en graus sexagesimals (recordi's que s'està treballant amb funcions trigonomètriques), des de 0 fins a 330, amb salts de 30, resultants de dividir 360 entre 12 mesos i multiplicar el resultat per *i*. En la cinquena, es troba el producte de la tercera columna pel sinus de la quarta, fila a fila. En la sisena, es calcula el producte de la tercera columna pel cosinus de la quarta, fila a fila. En la setena, es troba el producte de la tercera columna pel sinus del duple del valor de la quarta, fila a fila. En la vuitena, es calcula el producte de la tercera columna pel cosinus del duple del valor de la quarta, fila a fila. I així, amb el triple, etc. podria continuar-se el quadre, si no fós perquè en el cas analitzat n'hi ha prou amb dos harmònics per obtenir un bon ajust.

Quadre 1
Disposició ordenada dels càlculs bàsics per a l'obtenció dels harmònics de la sèrie de Fourier de les temperatures mitjanes mensuals a Barcelona

	t_i	i	t_i-m	x_i	$(t_1\text{-m})$ senx_i	$(t_i\text{-m})$ cosx_i	$(t_i\text{-m})$ sen$2x_i$	$(t_i\text{-m})$ cos$2x_i$
Gener	9,5	0	-7,0	0	0	-7,0	0	-7,0
Febrer	10,3	1	-6,2	30	-3,1	-5,4	-5,4	-3,1
Març	12,3	2	-4,2	60	-3,6	-2,1	-3,6	2,1
Abril	14,6	3	-1,9	90	-1,9	0	0	1,9
Maig	17,7	4	1,2	120	1,0	-0,6	-1,0	-0,6
Juny	21,5	5	5,0	150	2,5	-4,3	-4,3	2,5
Juliol	24,3	6	7,8	180	0	-7,8	0	7,8
Agost	24,3	7	7,8	210	-3,9	-6,8	6,8	3,9
Setembre	21,9	8	5,4	240	-4,7	-2,7	4,7	-2,7
Octubre	17,6	9	1,1	270	-1,1	0	0	-1,1
Novembre	13,5	10	-3,0	300	2,6	-1,5	2,6	1,5
Desembre	10,3	11	-6,2	330	3,1	-5,4	5,4	-3,1
M=16,5								

Un cop completat el quadre, es troben les sumes de les columnes cinquena, sisena, setena, vuitena, i següents, si n'hi haguessin. A continuació, es multipliquen les sumes per 2/12. En el cas d'estudi.

$$\Sigma\,(t_i\text{-m})\,\text{sen}x_i = -9{,}1 \quad \text{i} \quad -9{,}1\,(2/12)=-1{,}5$$
$$\Sigma\,(t_i\text{-m})\,\cos x_i = -43{,}6 \quad \text{i} \quad -43{,}6\,(2/12)=-7{,}3$$
$$\Sigma\,(t_i\text{-m})\,\text{sen}2x_i = 5{,}2 \quad \text{i} \quad 5{,}2\,(2/12)= 0{,}9$$
$$\Sigma\,(t_i\text{-m})\,\cos 2x_i = 2{,}1 \quad \text{i} \quad 2{,}1\,(2/12)= 0{,}4$$

Dons bé, $a_1=\sqrt{(1\text{-}5)^2+(-7{,}3)^2} \;=7{,}5$
$a_2=\sqrt{(0{,}9)^2+(\,0{,}4)^2} \;=1{,}0$

mentre que A_1 s'obté a partir de $\cos A_1=-1{,}5/7{,}5$ y de $\text{sen}A_1=-7{,}3/7{,}5$. Donat que el cosinus i el sinus són negatius, en aquest cas l'angle A_1 és del tercer quadrant. Usant la calculadora, arccos (-0,2)=101,5°, i perquè estigui en el tercer quadrant ha de ser 258,5°. De la mateixa manera, arcsen (0,973)=-76,7°, és a dir, 283,3°, i perquè estigui en el tercer quadrant ha de ser 256,7°. Per tant, arrodonint, l'angle A_1 val 258°.

De la mateixa manera, A_2 es calcula a partir de $\cos A_2=0,9/1,0$ i de $\mathrm{sen} A_2 0,4/1,0$. Donat que el cosinus i el sinus són positius, en aquest cas, l'angle A_2 és del primer quadrant. Usant la calculadora, arccos(0,9)=25,8° i arcsen(0,4)=23,6°. Per tant, arrodonint, l'angle A_2 val 25°.

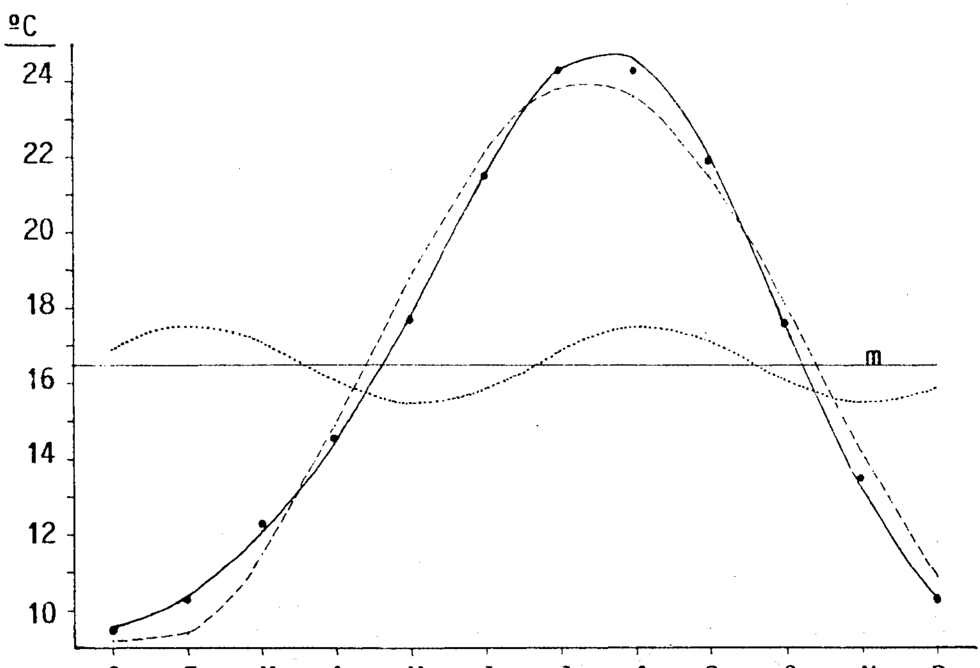
En conclusió, la funció desitjada —sèrie de Fourier— és:

$$y=16,5+7,5\ \mathrm{sen}(x+258)+1,0\ \mathrm{sen}(2x+25)$$

Es tracta, ara, de comprovar l'ajust d'aquesta funció als valors de partida. Per això només cal substituir *x* pels seus valors corresponents a cada mes de l'any (columna quarta de l'any). Els valors obtinguts són: gener, 9,7; febrer, 10,4; març, 12,1; abril, 14,5; maig, 17,8; juny, 21,5; juliol, 24,3; agost, 24,6; setembre, 22,1; octubre, 17,6; novembre, 13,2 i desembre, 10,4 (expressats en °C).

Vegi's, en conseqüència, el bon ajust que s'obté amb només dos harmònics. La màxima diferència és de 0,3°C en els mesos d'agost i novembre. Si s'hagués trobat un tercer i quart harmònics l'aproximació hauria estat encara millor. En la figura adjunta s'han representat els valors de partida, mitjançant punts, els obtinguts amb f(x), mitjançant una línia contínua, els trobats a partir del primer harmònic més la mitjana, mitjançant, és a dir, més aquesta, amb una línia de punts. D'aquesta manera, queda clar que el primer harmònic, de període anual, contribueix en gran mesura a les mitjanes tèrmiques mensuals, com és

Temperatures mitjanes mensuals, funció de Fourier que l'ajusta i descomposició en dos harmònics en el cas de Barcelona



sabut, per tenir la temperatura un clar cicle anual. El primer harmònic explica res més que el 93% de la variança total i el segon, només escassament un 2% (això es pot trobar usant la fórmula $a_1^2/2s^2$, sent *s* la desviació típica de les dades de partida, pel primer harmònic, i $a_2^2/2s^2$, pel segon). Vegi's, doncs, que els restants harmònics, no trobats, han de tenir també, com el segon harmònic, una contribució molt petita. El significat real del segon harmònic no resulta evident, encara que per la seva escassa contribució tampoc exigeix majors explicacions en aquesta aplicació introductòria.

Epíleg

L'anàlisi harmònica, i, concretament, les sèries de Fourier, constitueixen una valuosa eina pel tractament de les sèries temporals o cronològiques de dades geogràfiques, a les envistes de ressaltar o detectar llurs periodicitats i cicles. L'aplicació «manual» de les sèries de Fourier no ha de plantejar, com s'ha vist, problemes insalvables de càlcul per cap geògraf modern.

Referències bibliogràfiques

BASS, J. (1970): *Curso de Matemáticas*, Barcelona, Toray-Masson.

BROOKS, C.E.P. i CARRUTHERS, N. (1953): *Handbook of Statistical Methods in Meteorology*, London, Meteorological Office.

BRUNET, M. (1989): *Los efectos de la urbanización en el clima local. Un ensayo de climatología urbana: el caso de Tarragona*, Universitat de Barcelona (Tarragona), tesi doctoral inèdita.

LORENTE, J.M. (1966): *Meteorología*, Barcelona-Madrid, Labor.

MARTÍNEZ MOLINA, I. (1986): *Estadística (Aplicada a la Hidrometeorología)*, Madrid, I.N.M.

SUMNER, G.N. (1978): *Mathematics for Physical Geographers*, London, Arnold.